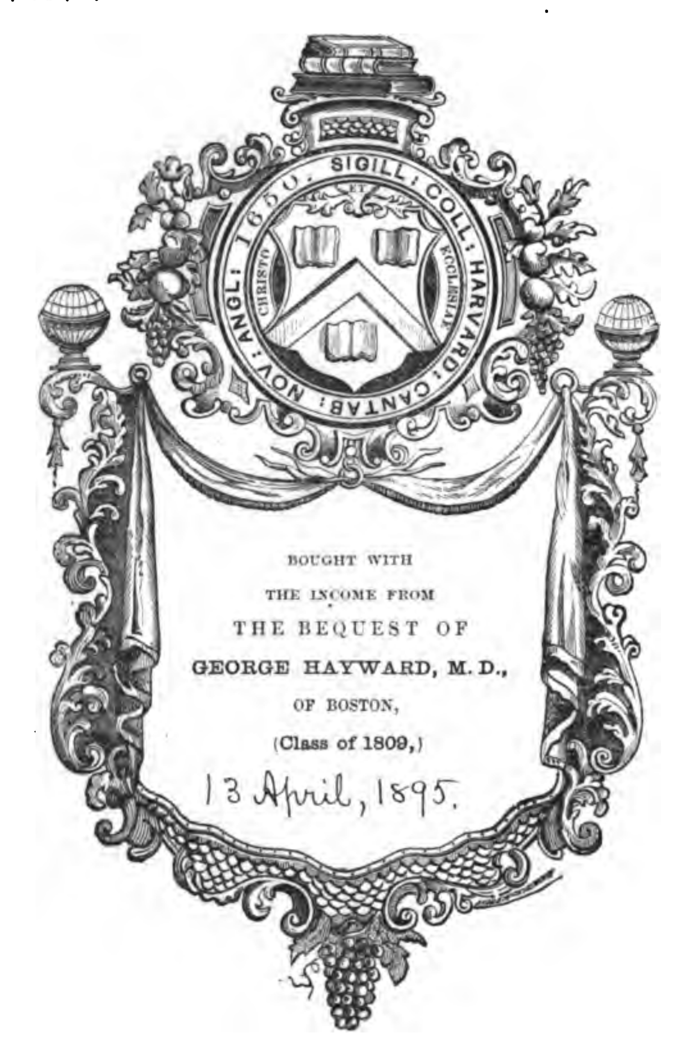
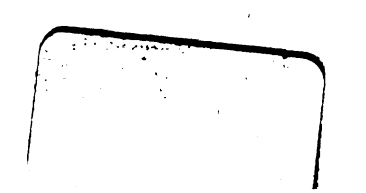

HARVARD
UNIVERSITY
LIBRARY


SIGILL : COLL : HARVARD : CANTAB : NOV : ANGL : 1650
CHRISTO ET ECCLESIAE
BOUGHT WITH
THE INCOME FROM
THE BEQUEST OF
GEORGE HAYWARD, M. D.,
OF BOSTON,
(Class of 1809,)
13 April, 1895.



Wissenschaftliche Beilage zum Programm des Leibniz-Gymnasiums.
Ostern 1891.

Stereometrische Untersuchungen.

Von

Dr. Carl Gusserow,
Oberlehrer.

Mit zwei Figuren.

BERLIN 1891.
R. Gaertners Verlagsbuchhandlung
Hermann Heyfelder

1891. Progr. No. 61.

Wenn man bei der Kubatur der von Ebenen begrenzten Körper den Satz von Cavalieri vermeiden will, so mufs man Sorge tragen, den Lehrgang in anderer Weise möglichst zu verkürzen. Dies kann nun in der That nach zwei Richtungen hin geschehen. Erstens läfst sich die meist übliche aber etwas schwerfällige Behandlung des Parallelepipedons etwas vereinfachen, und zweitens kann man das Pyramiden-Problem so behandeln, dafs die erforderliche Reihe nicht derart ist, dafs ihre Summierung vom Schüler eine besondere algebraische Thätigkeit erfordert, also die stereometrische Betrachtung unterbricht, sondern eine geometrische wird, deren Summe bekannt ist. Ja, man kann diese auf geometrischem Wege erlangen oder auch die Aufstellung der Reihe durch andere Betrachtungen umgehen.

Hierüber werde ich mehrere Vorschläge machen; verbinde aber aufserdem die Absicht damit, den bekannten Dreischnitt des Prismas zu vermeiden, da ich die Vorstellung der drei Pyramiden, welche sich zu einem Prisma ergänzen, für recht schwierig halte. Selten habe ich bei Schülern die Fähigkeit gefunden, die Vorstellung dieser drei, besonders der „schwebenden“, ohne erneute Vorzeigung eines Anschauungsmittels reproduzieren zu können; oft genug dagegen bei Kollegen die Ansicht, dafs das Prismatoid nicht in den Unterrichtsbereich gehöre, während nicht Anstand genommen wird, eines der schwierigsten, nämlich ein solches, in welchem Deckfläche und Grundfläche gleich Null sind, gleich anfänglich in Betracht zu ziehen. Auch halte ich den Weg, die dreiseitige Pyramide als speziellen Fall des schiefabgeschnittenen dreiseitigen Prisma aufzufassen, für kürzer als den umgekehrten, dieses mit Hülfe jener zusammenzusetzen. Missen möchte ich das schiefabgeschnittene Prisma aber im Unterricht nicht, denn nur mit diesem kann man dem Schüler eine übersichtliche Formel für die Kubatur sämtlicher ebenflächigen Körper geben. Die Zerschneidung derselben in Pyramiden verschafft eine solche nicht.

Hat man also für ein gerades rechtwinkliges Parallelepipedon $V = Gh$ entwickelt, so schneide man dasselbe nicht, wie üblich, durch eine Diagonalebene der Deckfläche in zwei stehende Prismen, sondern durch eine solche einer Seitenfläche in zwei liegende.

Für ein solches „Dach“ ergiebt sich dann $V = \frac{1}{2} Gh$, wenn die Giebel senkrecht auf der Grundfläche stehen und rechtwinklige Dreiecke sind. Ist nur die erste Bedingung erfüllt, so kann man das Dach doch leicht als Summe oder Differenz zweier Dächer darstellen, deren Giebel rechtwinklig sind, erhält also dieselbe Inhaltsformel.

Dafs diese aber auch noch gilt, wenn die Giebel zur Grundfläche geneigt sind, zeigt man in bekannter Weise aus Fig. 1.

Stehen die Grundflächen des einen Prismas ABC und $A_1B_1C_1$ gerade, die eines anderen DEF und $D_1E_1F_1$ schief auf den Seitenkanten, so sind die Prismen raumgleich, sobald $DD_1 = AA_1$ ist. Es sind nämlich die beiden schiefabgeschnittenen Prismen DEFABC und $D_1E_1F_1A_1B_1C_1$ kongruent, ihre nicht gemeinsamen Teile also raumgleich.

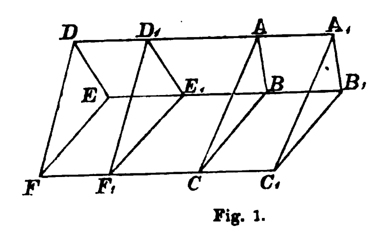


Fig. 1.

Nun kann man aber jedes Parallelepipedon als die Summe zweier Dächer mit gleicher Grundfläche und Höhe auffassen, hat also für dasselbe: $V = Gh$ und, wenn man es aufrichtet, so dafs die in den Diagonalen geschnittenen Seitenflächen zu Grundflächen werden, für jedes dreiseitige und somit auch für jedes mehrseitige Prisma: $V = Gh$.

Denkt man sich die Zerlegung eines Parallelepipedons in zwei Dächer doppelt ausgeführt, so zwar, dafs die beiden Schnitte durch zwei anstofsende Deckkanten geführt sind, so haben die beiden auf der Grundfläche des Parallelepipedons stehenden Dächer eine vierseitige Pyramide gemeinsam; es müssen also die beiden nicht gemeinsamen Teile, dreiseitige „schwebende" Pyramiden, raumgleich sein. Diese beiden sind aber symmetrisch, so dafs hieraus die Inhaltsgleichheit symmetrischer Körper leicht ersichtlich ist.

Legt man eine Ebene durch den Mittelpunkt der Schwerkante eines Parallelflächners, so wird dieser in zwei symmetrische Teile zerlegt, also halbiert, und es folgt für das schiefabgeschnittene Parallelepipedon: $V = Gs$.

Erscheint der Nachweis für die Symmetrie der beiden Teile für die noch ungeübte Vorstellungsfähigkeit des Schülers zu schwierig, so kann man die Deckfläche eines vollständigen Parallelepipedons um den Durchschnittspunkt der Diagonalen beliebig drehen und zeigen, dafs das neue, nun schief abgeschnittene Parallelepipedon, welches mit dem ursprünglichen dieselbe Grundfläche und dieselbe Richtung der Seitenkanten, die Deckfläche aber in jener neuen Ebene hat, dem ersten raumgleich ist, da die nicht gemeinsamen Teile symmetrische Körper sind.

Um noch elementarer zu verfahren, kann die Drehung der Deckfläche in eine vorher bestimmte Lage auch in zwei Drehungen zerlegt werden, von denen jede um eine Deckflächen-Diagonale als Axe erfolgt. Hierbei sind dann die betreffenden symmetrischen Körper dreiseitige Pyramiden.

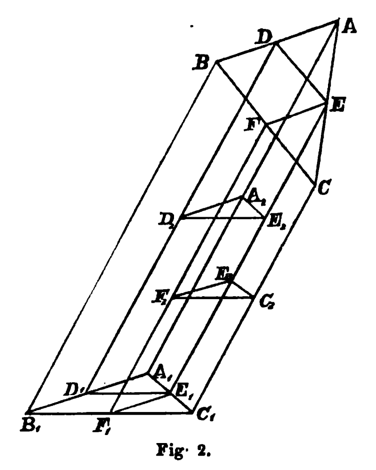
Man kann auch, ohne auf die Gleichheit symmetrischer Körper vorher einzugehen, die Drehung der Deckfläche eines gegebenen schiefabgeschnittenen Parallelepipedons in zwei andere zerlegen, welche je um die Verbindungslinie der Mitten zweier gegenüberliegenden Deckkanten als Axe ausgeführt werden, und zwar die erste Drehung so weit, dafs die Axe der zweiten der Grundfläche parallel wird, und die zweite Drehung dann bis die Deckfläche selbst der Grundfläche parallel wird. Die nicht gemeinsamen Teile sind dann jedesmal Prismen von gleicher Grundfläche und Höhe.

Es ist selbstverständlich, dafs bei diesen Drehungen auf die Formveränderung der Deckfläche, deren Ecken stets auf den Seitenkanten schleifen müssen, aufmerksam gemacht wird.

Sollte dies für den Anfänger bedenklich erscheinen, so verweise ich auf meine frühere Abhandlung[1]): Die Inhaltsermittlung der Körper aus ihren Projektionen, wo die Drehungen durch Konstruktion zweier Ebenen ersetzt sind.

Es ist interessant zu beachten, dafs durch die Kubatur des schiefabgeschnittenen Parallelflächners auch die eines schiefabgeschnittenen Prismas mit einem Vieleck, dessen Seiten paarweis gleich und parallel sind, als Grundfläche, also auch die eines Cylinderhufes gefunden wird. Zieht man nämlich in den Grundflächen die Diagonalen und zerlegt diesen entsprechend den Körper in dreiseitige Prismen, so können je zwei derselben, welche im Mittelpunkt sich gegenüberliegen, leicht zu einem schiefabgeschnittenen Parallelepipedon zusammengesetzt werden.

Das schiefabgeschnittene dreiseitige Prisma zu berechnen, will ich nun mehrere Vorschläge machen.



Es sei Fig. 2, ABC die Deckfläche und $A_1B_1C_1$ die Grundfläche eines dreiseitigen Prisma. Die Eckenhöhen seien der Reihe nach h_1, h_2, h_3.

Werden durch die Mitten D, E, F der drei Deckkanten zwei Ebenen parallel zu den Seitenkanten gelegt, so wird aus dem Prisma ein Parallelepipedon herausgeschnitten, für welches man leicht:

$$V = \frac{1}{2} G \left\{ \frac{h_2 + \frac{1}{2}(h_1 + h_3)}{2} \right\} \quad \text{oder:} \quad V = \frac{1}{8} G (h_1 + 2h_2 + h_3)$$

findet. Von den beiden übrigbleibenden Prismen kann man je ein vollständiges abschneiden, und zwar von dem unter ADE das mit $A_2D_2E_2$ als Deck- und $A_1D_1E_1$ als Grundfläche, und von dem unter EFC das mit $E_3F_2C_2$ als Deck- und $E_1F_1C_1$ als Grundfläche. Die Höhe des ersten sei $\frac{1}{2}h_1$, die des zweiten $\frac{1}{2}h_3$, so dafs die Inhalte $\frac{1}{8}Gh_1$ und $\frac{1}{8}Gh_3$ sind. Es ist dann die Summe der drei abgeschnittenen Körper:

$$\frac{1}{4} G (h_1 + h_2 + h_3) = \frac{3}{4} Gs.$$

Die beiden unter den Deckflächen ADE und EFC übrig bleibenden schiefabgeschnittenen Prismen sind wieder kongruent, so dafs man, wenn ihr Inhalt mit A_1, der des ganzen Körpers mit A bezeichnet wird, $A = \frac{3}{4}Gs + 2A_1$ setzen kann. Ebenso hat man in leicht verständlicher Bezeichnung:

[1]) Wissenschaftl. Beilage z. Programm d. Dorotheenst. Realschule. Ostern 1882.

$$A_1 = \frac{3}{4} G_1 s_1 + 2 A_2$$

$$A_2 = \frac{3}{4} G_2 s_2 + 2 A_3 \text{ u. s. w.,}$$

also:

$$\begin{array}{llll} A = \frac{3}{4} Gs + 2A_1 & & & \\ \quad\quad\quad\quad \| & & & \\ \quad 2 \cdot \frac{3}{4} G_1 s_1 + & 4 A_2 & & \\ & \quad \| & & \\ & 4 \cdot \frac{3}{4} G_2 s_2 + & 8 A_3 & \\ & & \quad \| & \\ & & 8 \cdot \frac{3}{4} G_3 s_3 + & \text{u. s. w.} \end{array}$$

oder:

$$A = \frac{3}{4} Gs + 2 \cdot \frac{3}{4} G_1 s_1 + 4 \cdot \frac{3}{4} G_2 s_2 + 8 \cdot \frac{3}{4} G_3 s_3 + \ldots.,$$

wo:

$$G_1 = \frac{1}{4} G$$

$$G_2 = \frac{1}{4} G_1 = \frac{1}{16} G$$

$$G_3 = \frac{1}{4} G_2 = \frac{1}{64} G \text{ u. s. w.}$$

und:

$$s_1 = \frac{1}{2} s$$

$$s_2 = \frac{1}{2} s_1 = \frac{1}{4} s$$

$$s_3 = \frac{1}{2} s_3 = \frac{1}{8} s \text{ u. s. w.,}$$

mithin:

$$G_1 s_1 = \frac{1}{8} Gs$$

$$G_2 s_2 = \frac{1}{64} Gs$$

$$G_3 s_3 = \frac{1}{512} Gs \text{ u. s. w. ist,}$$

und:

$$A = \frac{3}{4} Gs \left(1 + \frac{2}{2^3} + \frac{2^2}{(2^3)^2} + \frac{2^3}{(2^3)^3} + \frac{2^4}{(2^3)^4} + \ldots\right)$$

oder:

$$A = \frac{3}{4} Gs \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \ldots\right),$$

d. h.

$$A = Gs \text{ wird.}$$

Diese Reihe ist eine geometrische, also den Schülern bekannt, und braucht nicht erst ad hoc behandelt zu werden.

Will man ihre Summation doch vermeiden, so kann man ebenso verfahren, wie man im Anfangsunterricht einen periodischen Dezimalbruch zu verwandeln pflegt, indem man beachtet, dafs $A - 2A_1 = \frac{3}{4}Gs$ ist, also nach Vorstehendem, wenn x die Summe jener Reihe bezeichnet: $A - 2A_1 = \frac{3}{4}Gsx - 2G_1s_1x = \frac{3}{3}Gs$ oder: $\frac{3}{4}Gs\left(1 - \frac{1}{4}\right)x = \frac{3}{4}Gs$, d. h. $x = \frac{4}{3}$ ist.

Noch einfacher kann man verfahren, wenn man berücksichtigt, dafs über die Längen der drei Eckenhöhen h_1, h_2 und h_3 nichts vorausgesetzt ist, die Entwicklung also noch gültig bleibt, wenn diese gleich lang angenommen werden. Es läfst sich in der That ein vollständiges Prisma in derselben Weise, wie oben, zerschneiden, so dafs man für dieses auch $\frac{3}{4}Gsx$ und somit $x = \frac{4}{3}$ erhält.

Teilt man die Deckkanten nicht in 2 sondern in 3 gleiche Teile und schneidet die 3 schiefabgeschnittenen Prismen (A_1) an den drei Ecken der Deckfläche ab, so hat man unter jedem derselben ein vollständiges stehen, mit dem Inhalt $\frac{1}{9}G \cdot \frac{2}{3}h_1$, $\frac{1}{9}G \cdot \frac{2}{3}h_2$, $\frac{1}{9}G \cdot \frac{2}{3}$ und in der Mitte ein sechsseitiges Prisma mit dem Inhalt $h_3 \frac{2}{3}Gs$, erhält also als Summe $A = \frac{8}{9}Gs + 3A_1$. Vielleicht erscheint hiernach die Aufstellung der Reihe noch einfacher.

Will man aber diese ganz vermeiden, so ergänze man das gegebene Prisma A durch ein anderes B, für welches s denselben Wert hat wie für A, zu einem vollständigen Prisma. Zerschneidet man dann B in derselben Weise wie A, so hat man:

$$A - B = 2(A_1 - B_1) = 4(A_2 - B_2) = 8(A_3 - B_3) = \ldots\ldots = 2^n(A_n - B_n).$$

Es ist nun stets $A_n - B_n < A_n + B_n$, und dieses gleich $\frac{A+B}{(2^n)^2}$, mithin: $A - B < 2^n \frac{A+B}{(2^n)^2}$, d. i. $A - B < \frac{A+B}{2^{2n}}$, d. h. kleiner als jede angebbare Gröfse, da n beliebig grofs gesetzt werden kann; schliefslich also:

$$A = B = Gs.$$

Die eben erwähnte Dreiteilung läfst sich hier besonders vorteilhaft anwenden.

Noch gefälliger ist vielleicht folgende Einkleidung.

Man hat:

$$A + B = 2Gs$$
$$A - B = 2^n(A_n - B_n)$$

also:

$$A = Gs + 2^n \frac{A_n - B_n}{2},$$

mithin:

$$Gs + 2^n \cdot \frac{A_n + B_n}{2} > A$$

$$Gs - 2^n \cdot \frac{A_n + B_n}{2} < A$$

und, da $A_n + B_n = \frac{A+B}{(2^n)^3} = \frac{2\,Gs}{2^{3n}}$ ist:

$$Gs\left(1 + \frac{1}{2^{2n}}\right) > A > Gs\left(1 - \frac{1}{2^{2n}}\right).$$

Sobald also ein beliebig kleiner Bruchteil von Gs diesem zugefügt wird, erhält man einen Wert, welcher gröfser als A ist; wird aber ein solcher abgezogen, so ist der Rest kleiner als A, folglich ist: $A = Gs$.

Will man aber den Cavalierischen Satz seiner Handlichkeit wegen beibehalten, so empfehle ich dennoch[1]) das dreiseitige schiefabgeschnittene Prisma vor der Pyramide zu behandeln und diese nur als speziellen Fall desselben aufzufassen. Selbst wenn sonst nicht beabsichtigt wäre, dieses in den Bereich des Unterrichts zu ziehen, ist dieser Weg kürzer als der umgekehrte. Auch habe ich stets gefunden, dafs der Ausdruck $V = \Sigma Ps$, welcher für jeden ebenflächigen Körper gelten soll, von den Schülern leicht verstanden wird, wenn man jede Seite, soweit erforderlich, durch Diagonalen in Dreiecke zerlegt und den Körper auf eine Grundebene projiziert. Die Unterscheidung von unten liegenden oder subtraktiv zu nehmenden Projektionen und oben liegenden oder additiv zu rechnenden macht ihnen auch keine Schwierigkeiten. Sie sehen aus dieser Formel, dafs sie alle von Ebenen begrenzten Körper kubieren können und empfinden eine gewisse Freude über die erlangte Erkenntnis, sowie über den erreichten Ruhepunkt in dem Lehrgange. Zu gleicher Zeit erhalten sie aber auch einen Einblick in die Methode der Parallelprojektion, ein Vorteil, welchen ich sehr hoch anzuschlagen geneigt bin. Besonders an Anstalten, an welchen weder im Zeichenunterricht noch in dem mathematischen Raum genug ist, auf die Projektionslehre näher einzugehen, sollte man die Gelegenheit nicht versäumen, den abgehenden Schülern wenigstens die Begriffe von Grundrifs und Aufrifs mitzugeben. Es werden von ihnen wohl fast alle ein oder das andere Mal in ihrem Leben in die Lage kommen, sich mit einem Bauplan befassen zu müssen und finden es dann meist sehr schwer, sich in einem solchen zurechtzufinden. Werden doch jetzt bei vielen Bauten die Konkurrenzentwürfe öffentlich ausgestellt; sollte da nicht zur allgemeinen Bildung die Fähigkeit gehören, nicht nur einen oberflächlichen Eindruck der Fassade in sich aufnehmen, sondern auch in das Verständnis der inneren Einrichtungen eindringen zu können?

Will man aber den gewohnten Weg gehen und die dreiseitige Pyramide gleich nach dem Prisma behandeln, so kann man ebenfalls das oben auseinandergesetzte Verfahren anwenden. Setzt man h_2 und h_3 gleich Null voraus, so hat man statt des Prismas eine dreiseitige Pyramide; schneidet man dann von der Pyramide A den einen der beiden Teile A_1 an der Spitze, den anderen an einer Grundecke ab, so besteht der Restkörper aus einem stehenden und einem liegenden dreiseitigen Prisma, deren Summe $\frac{1}{4}Gh$ ist,

---

[1]) Vergl. meinen Leitfaden der Stereometrie u s. w. Berlin, Julius Springer, 1885.

so dafs man leicht $A = \frac{1}{4} Gh + 2A_1$ erhält und dann einen der gezeigten Wege einschlagen kann. Behufs Summierung der Reihe kann man aus einem Würfel eine dreiseitige Pyramide, deren Inhalt bekannt ist, herausschneiden und zeigen, dafs dieser sich durch dieselbe Reihe darstellen läfst wie der Inhalt der betrachteten Pyramide.

Teilt man die Kanten in 10 gleiche Teile, so erhält man als Reihe: $0{,}33 + 0{,}0033 + 0{,}000033 + \ldots$, also den periodischen Dezimalbruch 0,33, welcher jedem Schüler als gleichwertig mit $\frac{1}{3}$ bekannt ist; doch wird die Aufstellung der Reihe etwas umständlich, wenn sie auch im einzelnen einfach genug bleibt.

Der Satz, dafs dreiseitige Pyramiden gleicher Grundfläche und Höhe raumgleich sind, läfst sich aber auch leicht folgendermafsen beweisen. Man schneide in bekannter Weise aus jeder Pyramide einen treppenförmigen Körper heraus, welcher aus n gleich hohen dreiseitigen Prismen gebildet wird, deren Seitenkanten einer Seitenkante der betreffenden Pyramide parallel sind. Beide Körper erweisen sich als raumgleich. Schneidet man nun von der ersten der beiden gegebenen Pyramiden durch den obersten Teilpunkt derjenigen Seitenkante, nach welcher die Prismen gerichtet sind, einen Pyramidenstumpf ab, so dafs der Rest der ursprünglichen Pyramide ähnlich wird, so ist dieser Rest kleiner als die Prismensumme, während die zweite Pyramide gröfser ist als diese. Man erkennt mithin, wenn n grofs genug vorausgesetzt ist, dafs die erste Pyramide nach Abzug einer beliebig dünnen Schicht kleiner, durch umgekehrte Verwendung des Beweises aber auch, dafs sie durch Hinzufügung einer solchen gröfser werden mufs als die andere — dafs also beide Pyramiden raumgleich sind. Dafs hierbei n als ganze Zahl vorausgesetzt ist, beeinträchtigt die Allgemeinheit nicht.

Um hieraus das schiefabgeschnittene dreiseitige Prisma zu kubieren, drehe man dessen Deckfläche um eine ihrer Mitteltransversalen so weit, bis eine andere der Grundfläche parallel ist, und dann um diese, bis die Deckfläche selbst der Grundfläche parallel wird. Das erste Prisma ist dann gleich dem zweiten und dieses gleich dem dritten, weil die nicht gemeinsamen Teile jedesmal dreiseitige Pyramiden gleicher Grundfläche und Höhe sind. Das dritte Prisma ist aber ein vollständiges, dessen Deckfläche durch den Schwerpunkt der Deckfläche des ersten geht.

Ehe ich nun das Pyramidenproblem verlasse, will ich noch darauf aufmerksam machen, dafs man aus einem Grundsetze „Ähnliche Körper werden durch homologe Schnitte in proportionale Teile geteilt“, der sich am schief durchschnittenen Prisma — für welches er nur zur Anwendung gelangt — leichter anschaulich machen läfst als der Satz von Cavalieri, auch zur Inhaltsförmel für die Pyramide gelangt. Man hat nämlich mit den oben gebrauchten Bezeichnungen:

$$\frac{A + B}{A} = \frac{A_1 + B_1}{A_1} = \frac{2A_1 + 2B_1}{2A_1}$$

$$\frac{A - 2A_1 + B - 2B_1}{A - 2A_1} = \frac{A + B}{A} \quad \text{oder:} \quad \frac{2 \cdot \frac{3}{4} Gs}{\frac{3}{4} Gs} = \frac{2Gs}{A}, \text{ d. i. } A = Gs.$$

Ist man gezwungen, den Unterricht besonders leicht faſslich einzurichten, ohne auf scharfe Unterscheidungen eingehen zu können, so kann man die Wahrheit jenes Satzes stillschweigend voraussetzen und wird beim Schüler keinem Bedenken begegnen, wenn man eine Pyramide gleich dem achten Teile einer ihr ähnlichen setzt, sobald beide in homologer Weise aus zwei ähnlichen Prismen, die dasselbe Gröſsenverhältnis haben, abgeschnitten sind. Man hat dann bei der dreiseitigen Pyramide $A_1 = \frac{1}{8} A$ und aus $A - 2A_1 = \frac{3}{4} Gs$, $A = Gs$.

Schneidet man das dreiseitige Prisma durch eine Deckkante und eine Grundecke schief ab, so erhält man eine auf ihrer Spitze stehende Pyramide und einen Keil und hat aus der Formel $V = Gs$ für diese drei Körper den Inhalt Gh, $\frac{1}{3} Gh$ und $\frac{2}{3} Gh$. Aus ihnen kann man alle Prismatoide zusammensetzen, und mit ihnen sollen auch die im Unterrichte meist behandelten krummflächigen Körper verglichen werden.

Werden die Seitenflächen des Prismatoids, so weit erforderlich, durch Diagonalen in Dreiecke zerlegt und diese in Ober- und Unterdreiecke unterschieden, so kann man dasselbe durch Projizieren auf die Grundfläche so zerschneiden, daſs unter der Deckfläche ein Prisma, unter jedem Unterdreieck eine dreiseitige Pyramide und unter jedem Oberdreieck ein Keil, wie er eben aufgeführt ist, steht. Es setzt sich das Prismatoid also zwanglos aus diesen drei Körpern zusammen, und es ist:

$$V = \frac{h}{3}(3D + 2O + U),$$

wo D die Deckfläche (G die Grundfläche), O und U die Summen der Projektionen der Ober- bezw. der Unterdreiecke bezeichnen. Man kann diesem Ausdruck mittels der Gleichung $G = D + O + U$ noch mehrere Formen geben. Am brauchbarsten habe ich die Formel $V = \frac{h}{3}(2D + O + G)$ gefunden. Die am häufigsten angewendete $V = \frac{h}{6}(D + 4H + G)$, in welcher H den Schnitt in halber Höhe bezeichnet, erhält man aus jener sehr leicht, wenn man bedenkt, daſs der Teil von H, welcher innerhalb des Prismas liegt, gleich D, die Summe der Teile innerhalb der Pyramiden gleich $\frac{1}{4} U$ und die Summe derer innerhalb der Keile $\frac{3}{4} O$ ist, also $H = D + \frac{1}{4} U + \frac{3}{4} O$ oder $4H = 3D + 2O + G$ ist. Aus $V = \frac{h}{6}(4D + 2O + 2G)$ hat man dann unmittelbar:

$$V = \frac{h}{6}(D + 4H + G).$$

Auf diese und die Formel $V = \frac{h}{3}(2D + O + G)$ muſs ich noch etwas näher eingehen, da ich auſser vielen günstigen Beurteilungen dieser von mir gegebenen Formel

auch mehrfach die Bemerkung gelesen habe, dafs sie um nichts einfacher in der Anwendung sei als die andere bisher gebräuchliche. Die geehrten Herren Rezensenten haben hierbei übersehen, dafs in erster Linie gar nicht von mir behauptet ist, dafs meine Formel einfacher in der Anwendung sei. Ich habe sie — abgesehen davon, dafs ich sie für einfacher in der Ableitung halte — zur Ausfüllung einer vorhandenen Lücke veröffentlicht. Es läfst sich nämlich die Formel $\frac{h}{6}(D + 4H + G)$ in vielen Fällen überhaupt gar nicht anwenden, d. i. in allen Fällen, bei welchen es sich um Aufmessungen[1] handelt, weil dann der Schnitt in halber Höhe beim fertigen feststehenden Körper fast nie gemessen werden kann. — Winkelmessungen von aufsen an Körpern werden mit gutem Recht in der Praxis verworfen. —

Dafs diese Lücke nicht schon lebhafter gefühlt ist, liegt wohl daran, dafs in der Praxis es sich meist um Körper aus minder wertvollem Material handelt, der Techniker sich also mit Annäherungs-Formeln behelfen kann — auf höheren Lehranstalten meist aber nur ganz einfache Körper in den Unterrichtsbereich gezogen werden, bei welchen sich die erforderlichen Schnitte leicht aus den gegebenen Bedingungen berechnen lassen; solche Übungen aber, bei welchen ein fertiger Körper im Modell oder durch Beschreibung der Anschauung des Schülers übermittelt wird, mit der Aufforderung, die zur Inhaltsberechnung erforderlichen Strecken aufzufinden und zu messen, fast gar nicht angestellt werden. Dafs dies nun nicht geschieht, ist aber sehr zu bedauern, und viele Klagen über Schüler, welche von höheren Unterrichtsanstalten in die technische Praxis übergehen, lassen sich auf solche und ähnliche Unterlassungssünden zurückführen. Es wird eben auf der Schule das räumliche Anschauungsvermögen nur ganz einseitig entwickelt, indem die gestellten Aufgaben meist nur der Art sind, wie sie dem Techniker bei der Veranschlagung einer Arbeit erwachsen, nicht aber so, wie sie ihm bei Aufmessungen entgegentreten, trotzdem Aufgaben dieser Art lebhaftes Interesse der Schüler zu erwecken pflegen und für ihre mathematische Ausbildung mit grofsem Erfolge verwertet werden können.

Es läfst sich nun zwar H in den oben erwähnten Fällen aus dem Grundrifs, wie wir ja $4H = 3D + 2O + G$ gefunden haben, berechnen; aber einesteils habe ich diese Angabe in technischen für die Praxis bestimmten Lehrbüchern nicht gefunden, andernteils heifst dies ja auch nur den Ausdruck $\frac{h}{6}(D + 4H + G)$ für den einen Fall in $\frac{h}{3}(2D + O + G)$ oder einen ähnlichen umsetzen.

Vergleicht man nun aber beide Formeln in der Anwendung, so sieht man, dafs aufser D und G die eine die Kenntnis der Gröfse H, die andere dagegen die von $D + O$ (oder auch $G - U$) verlangt. Dafs die einzelnen Projektionen der Oberdreiecke zu berechnen wären, ist natürlich überflüssig; doch mufs ich dies noch ausdrücklich anführen, da es zu Ungunsten meiner Formel teilweis übersehen worden ist.

Dafs sie zeigt, wie die Deckfläche verschoben werden kann, ohne den Inhalt des Prismatoids zu ändern, erleichtert für kompliziertere Körper die Rechnung bedeutend, sobald man sich mit ihrer vielseitigen Anpassungsfähigkeit vertraut gemacht hat. Für die

[1]) Solche Aufgaben habe ich in meinem Leitfaden § 22 behandelt.

einfachen Prismatoide, wie sie im Elementar-Unterricht behandelt zu werden pflegen, scheinen nun beide Formeln allerdings gleich brauchbar zu sein. Nimmt man z. B. einen Obelisk mit rechteckigen Grundflächen, für den gewöhnlich $V = \frac{h}{3}\left\{a_1\left[b_1 + \frac{b}{2}\right] + a\left[b + \frac{b_1}{2}\right]\right\}$ gegeben wird, so erhält man nach der üblichen Formel $V = \frac{h}{6}\left\{a_1 b_1 + 4\left[\frac{a + a_1}{2}\right]\left[\frac{b + b_1}{2}\right] + ab\right\}$, nach meiner $V = \frac{h}{3}\left\{a_1 b_1 + \frac{1}{2} a_1 b + \frac{1}{2} a b_1 + ab\right\}$. Beide Ausdrücke bedürfen einer Umformung, die bei dem zweiten wohl noch etwas geringer ist, als bei dem ersten[1]). Sobald man aber nur etwas weiter geht, wie z. B. Wittstein[2]), so ist man doch genötigt, auf den Grundrifs einzugehen, und da zeigt es sich, dafs die Eckkoordinaten der Figur $D + O$ aus diesem bekannt sind, während die von H erst aus ihnen berechnet werden müssen, man also wiederum den Ausdruck mit H durch Rechnungen für den speziellen Fall in den mit $D + O$ überführt, ohne dafs dieses allerdings in einer Formel zum Ausdruck kommt, da in derselben zum Schlufs die Eckkoordinaten des Grundrisses auftreten.

Als Beispiel will ich folgende Aufgabe geben. Die Grundfläche eines Prismatoids sei ein regelmäfsiges Vieleck, die Deckfläche ein ebensolches und zwar so, dafs ihre Ecken senkrecht über den Mitten der Grundkanten liegen. Man hat hier sofort G und daraus auch D, während $D + O = G$ ist. Die Berechnung des Schnittes in halber Höhe dürfte hier etwas umständlich werden. Ebenso ist es bei Antiprismen.

Zum Schlusse greife ich noch einmal auf meine anfangs eingeschobene Bemerkung zurück, dafs die von mir a. d. a. O. gegebene Ableitung meiner Formel und dadurch auch diejenige der bisher gebräuchlichen — gleichgiltig wie man das Pyramidenproblem behandelt hat — viel einfacher zu sein scheint, als die mir bisher bekannt gewordenen direkten Ableitungen der letzteren. Aus diesen Gründen hoffe ich, dafs auch meine Formel im mathematischen Unterricht Bürgerrecht erwerben wird und will nun, da ich die Besprechung des Lehrganges doch schon unterbrochen habe, noch einiges Neue über das Prismatoid geben, was, wenn auch für den Unterricht zu weit gehend, mir von allgemeinerem Interesse zu sein scheint.

Wird das Prismatoid parallel zur Grundfläche in der Schnitthöhe $h' = zh$ geschnitten, so ist der Teil der Schnittfläche, welcher unter der Deckfläche liegt, inhaltlich gleich D, die Summe der Teile unter den Oberdreiecken $O(1 - z^2)$ und die Summe derer unter den Unterdreiecken $U(1 - z)^2$, d. i. für die ganze Schnittfigur:

$$Z = G - 2Uz + (U - O)z^2.$$

Hieraus ist ersichtlich, dafs durch drei Schnitte, welche inhaltlich — A, B, C — und mit ihren Schnitthöhen ah, bh und ch bekannt sind, der Rauminhalt des Prismatoids

---

1) Die a. d. a. O. von mir gegebene andere Formel, bei deren Anwendung das Prismatoid auf die Neigungsebene der beiden Grundflächen projiziert wird, die also für den Fall, dafs diese nicht parallel sind, besonders vorteilhaft ist, giebt direkt $V = \frac{h}{3}\left\{a_1\left[b_1 + \frac{b}{2}\right] + a\left[b + \frac{b_1}{2}\right]\right\}$ ohne jede Umformung.

2) Dr. Th. Wittstein, Prof., Lehrbuch d. Elementar-Mathematik. Stereometrie § 119. Hannover, Hahnsche Buchhandlung, 1880.



berechnet werden kann, wenn aufserdem noch h gegeben ist. Aus den drei Gleichungen nämlich:

$$A = G - 2Ua + (U - O)a^2$$
$$B = G - 2Ub + (U - O)b^2$$
$$C = G - 2Uc + (U - O)c^2$$

sind die drei Koeffizienten G, U und U — O zu ermitteln.

Wird ferner für irgend einen Körper das Gesetz der Querschnitte durch eine Funktion zweiten Grades der Schnitthöhe von der Form:

$$Z = u + vz + wz^2$$

dargestellt, so erkennt man, dafs er einem Prismatoid, für welches dasselbe Gesetz gilt, raumgleich sein mufs, sobald er aufser in der Höhe mit diesem übereinstimmt in dem Flächeninhalte dreier Schnittfiguren gleicher Schnitthöhe. Aus der Gleichung $V = \frac{h}{3}(3G - 3U + U - O)$ folgt also für alle Körper zweiten Grades einerseits, wenn $G = u$, $-2U = v$ und $U - O = w$ gesetzt wird:

$$V = \frac{h}{6}(6u + 3v + 2w),$$

und andrerseits, wenn aus den vorstehenden drei Gleichungen G, U und U — O berechnet werden:

$$V = \frac{h}{6}\left\{\frac{2 + 6bc - 3[b + c]}{[a - b][a - c]}A - \frac{2 + 6ac - 3[a + c]}{[a - b][b - c]}B + \frac{2 + 6ab - 3[a + b]}{[a - c][b - c]}C\right\},$$

eine ganz allgemeine Formel, welche alle bisher gegebenen umfafst.

Die Koeffizienten sind, wie zu erwarten, der Art, dafs sie in einander übergehen, wenn a, b, c zyklisch mit einander vertauscht werden, und sich nicht ändern, wenn $1 - a$, $1 - b$, $1 - c$ für a, b, c gesetzt wird, d. h. wenn man das Prismatoid umkehrt, also die Grundflächen mit einander vertauscht. Eine nähere Untersuchung dieser Koeffizienten wird sich leichter anstellen lassen, wenn ich erst noch eine andere Ableitung der allgemeinen Formel gegeben habe. Ich will dieselbe so geben, wie man sie ohne vorangegangene Behandlung des Pyramidenproblems entwickeln kann. Die Klassifizierung der Körper nur nach ihren Querschnitten ist zwar für die Schüler etwas abstrakt, dafür aber auch besonders kurz und erfolgreich. Es führt diese Behandlungsweise von der Inhaltsformel für das gerade Prisma ausgehend direkt zu einer, welche für alle Körper gilt, deren Querschnitte inhaltlich durch eine Funktion zweiten Grades ihrer Schnitthöhe dargestellt werden können. Ist diese Funktion:

$$Z = u + vz + wz^2$$

und sind die drei Schnitte A, B, C mit ihren Schnitthöhen ah, bh und ch gegeben, so kann man aus den drei Gleichungen:

$$A = u + av + a^2w$$
$$B = u + bv + b^2w$$
$$C = u + cv + c^2w$$

die drei Koeffizienten u, v, w berechnen und erhält sie als Ausdrücke ersten Grades in Bezug auf A, B und C. Teilt man also den Körper in Parallelschichten von der Höhe

$\frac{h}{n}$, wo n so grofs gedacht werden mufs, dafs jede einzelne Schicht als Prisma aufgefafst werden kann, so hat man den Inhalt des vorgelegten Körpers als eine Summe, in welcher h ausgeklammert werden kann, und A, B, C nur im ersten Grade auftreten. Man hat also:

$$V = h(Ax + By + Cz),$$

wo x, y, z Funktionen von a, b, c sind, so zwar, dafs sie in einander übergehen, wenn a, b, c zyklisch vertauscht werden, und sich nicht ändern, wenn für sie $1-a$, $1-b$, $1-c$ gesetzt wird.

Die Ermittlung von x, y und z folgt aber überraschend einfach aus der Betrachtung bekannter Körper, welche als spezielle Fälle ebenfalls durch diese allgemeine Formel kubiert werden können.

Ein solcher ist das gerade Prisma, für welches $A = B = C = G$ sein mufs, so dafs sich sofort ergiebt $V = Gh = Gh(x + y + z)$ oder:

$$x + y + z = 1.$$

Eine Pyramide, deren Grundfläche mit der eines Würfels mit der Kante k zusammenfällt und deren Spitze der Mittelpunkt des Würfels ist, hat den Inhalt $\frac{k^3}{6}$, oder es ist, in G und h ausgedrückt, $V = \frac{1}{3} Gh$. Da diese Pyramide aber ebenfalls nach jener Formel sich mufs berechnen lassen, so ist für sie $A = (1-a)^2 G$, $B = (1-b)^2 G$ und $C = (1-c)^2 G$ zu setzen, und man hat:

$$V = \frac{1}{3} Gh = \{[1-a]^2 x + [1-b]^2 y + [1-c]^2 z\} Gh \qquad \text{oder:}$$

$(1-a)^2 x + (1-b)^2 y + (1-c)^2 z = \frac{1}{3}$, und ebenso mit der vorhin erwähnten Umkehrung des Körpers: $a^2 x + b^2 y + c^2 z = \frac{1}{3}$, also nach Auflösung der Klammern:

$$x + y + z - 2(ax + by + cz) + a^2 x + b^2 y + c^2 z = \frac{1}{3}, \qquad \text{also:}$$

$$x + y + z - 2(ax + 2by + 2cz) = 0 \qquad \text{oder:}$$

$$ax + by + cz = \frac{1}{2}.$$

Will man die Umkehrung des Körpers vermeiden, so kann man ein gerades dreiseitiges Prisma, dessen Grundfläche ein rechtwinkliges Dreieck ist, auf eine Seite legen, es also als „Dach“ betrachten und für dieses das Gesetz der Querschnitte ermitteln. Man erhält $Z = G(1-z)$ und $V = \frac{1}{2} Gh$, so dafs man in die allgemeine Formel $A = G(1-a)$, $B = G(1-b)$ und $C = G(1-c)$ einsetzen mufs. Es folgt dann:

$$V = \frac{1}{2} Gh = \{[1-a]x + [1-b]y + [1-c]z\} Gh, \qquad \text{d. i.}$$

$$(1-a)x + (1-b)y + (1-c)z = \frac{1}{2}$$

oder, da $x+y+z=1$ schon gefunden ist:

$$ax+by+cz=\frac{1}{2}.$$

Mit Hülfe dieser Gleichung erhält man dann aus der eben behandelten Pyramide:

$$a^2x+b^2y+c^2z=\frac{1}{3}.$$

Aus den drei Gleichungen:

$$x+y+z=1$$
$$ax+by+cz=\frac{1}{2}$$
$$a^2x+b^2y+c^2z=\frac{1}{3}$$

erhält man:

$$x=\frac{1}{6}\frac{2+6bc-3(b+c)}{(a-b)(a-c)}$$
$$y=-\frac{1}{6}\frac{2+6ac-3(a+c)}{(a-b)(b-c)}$$
$$z=\frac{1}{6}\frac{2+6ab-3(a+b)}{(a-c)(b-c)},$$

also wie vorher:

$$V=\frac{h}{6}\left\{\frac{2+6bc-3[b+c]}{[a-b][a-c]}A-\frac{2+6ac-3[a+c]}{[a-b][b-c]}B+\frac{2+6ab-3[a+b]}{[a-c][b-c]}C\right\}.$$

Setzt man $a=0$, $b=\frac{1}{2}$ und $c=1$, so hat man, am einfachsten aus den drei Bestimmungsgleichungen:

$$x+y+z=1$$
$$\frac{1}{2}y+z=\frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{4}y+z=\frac{1}{3}$$

$$y=\frac{4}{6},\ z=\frac{1}{6},\ x=\frac{1}{6},\ \text{mithin } V=\frac{h}{6}(G+4H+D)$$

und in ähnlicher Weise viele andere Formeln für die im Unterricht zu behandelnden Körper.

Aus den eben aufgeführten Gleichungen erkennt man nun, dafs von den drei Gröfsen a, b und c keine der anderen gleich sein darf. Ebenso aber auch, dafs von den drei Gröfsen x, y und z weder drei noch auch zwei zu gleicher Zeit verschwinden können.

Setzt man nämlich z. B. die beiden Zähler von x und y einander gleich, so erhält man $2(a-b)c=a-b$, d. i. $c=\frac{1}{2}$. Für diesen Wert aber werden jene Zähler gleich $\frac{1}{2}$ und nicht gleich Null. Man kann also im allgemeinen das Prismatoid nicht kubieren, wenn nur ein Querschnitt gegeben ist, ein Resultat, welches man auch erhält,

sobald man der Inhaltsformel entsprechend $m(2D+O+G)=G-2Uz+(U-O)z^2$ setzt, wo m irgend eine für alle Prismatoide konstante Zahl sein soll. Diese Gleichung giebt keinen Wert für z, der für alle Prismatoide derselbe ist.

Von gröfserer Wichtigkeit ist es, die Vereinfachungen zu ermitteln, welche man in die allgemeine Inhaltsformel für das Prismatoid einführen kann, was sich nach zwei Richtungen hin versuchen läfst, indem man entweder über a, b, c oder über x, y, z Bestimmungen trifft.

In erster Hinsicht dürften wohl solche Formeln von Interesse sein, in welchen die erforderlichen Schnitte symmetrisch zum Schnitt in halber Höhe liegen, so dafs $a+c=1$ oder $a=\frac{1}{2}+s$ und $c=\frac{1}{2}-s$ ist. Setzt man hierzu $b=\frac{1}{2}$, so findet man $x=z$ und ebenso aus Hinzufügung dieser Bedingung: $b=\frac{1}{2}$, d. i. $B=H$. Man hat dann:

$$2x+y=1$$

$$(a^2+c^2)x+\frac{1}{4}y=\frac{1}{3} \qquad \text{oder:}$$

$$\left(\frac{1}{2}+2s^2\right)x+\frac{1}{4}y=\frac{1}{3}, \qquad \text{d. i.}$$

$$x=\frac{1}{24s^2},\ y=1-\frac{1}{12s^2} \qquad \text{und:}$$

$$V=\frac{h}{24s^2}\left(A+2(12s^2-1)H+C\right).$$

Setzt man hierin $s=\frac{1}{2}$, so geht diese Formel über in die bekannte mit G, D und H. Setzt man $s=\frac{1}{\sqrt{12}}$, so erhält man eine Formel für die Inhaltsbestimmung, in welcher nur zwei aber symmetrisch zur Mitte gelegene Schnitte erforderlich sind, nämlich $a=\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$, $c=\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$, $x=z=\frac{1}{2}$ und $y=0$, mithin:

$$V=\frac{h}{2}(A+C),$$

was für Antiprisma, Kugel u. dergl. $V=Ah$ giebt.

Ich setze diesen Ausdruck gleich hierher und nicht zu den übrigen, in welchen $y=0$ ist, weil das Wesentliche hier die symmetrische Lage der beiden Schnitte ist. Solche Formeln nämlich, in denen $b=\frac{1}{2}$, $a+c=1$ und $x=z$ sind, gelten auch für Körper, bei welchen die Querschnitte Funktionen dritten Grades der Schnitthöhe sind, so dafs man auch für diese eine Inhaltsformel aufstellen kann, welche nur die Kenntnis zweier Schnitte erfordert.

Nach Lucke[1]) kann man nämlich einen Körper, für welchen das Gesetz $Z=u+vz+wz^2+ez^3$ gilt, mit einem ihm kongruenten in umgekehrter Lage kom-

[1]) Ztschr. f. mathem. u. naturw. Unterricht J. C. V. Hoffmann. IX. Heft I, S. 10. 1888.

binieren, so dafs für diesen $Z = u + v(1-z) + w(1-z)^2 + e(1-z)^3$ sein würde. Durch Addition beider Gleichungen erhält man nun für die Summe der beiden Körper das Gesetz:

$$Z = zu + v + w + e - [2w + 3e]z + [2w + 3e]z^2,$$

also eine Funktion zweiten Grades der Schnitthöhe, kann also sämtliche Inhaltsformeln des Prismatoids anwenden; solche aber, in denen $a + c = 1$, $b = \frac{1}{2}$ und $x = z$ ist, enthalten dann 2A, 2H und 2C, so dafs man auch für den gegebenen Körper allein

$$V = \frac{h}{24s^2}\left(A + 2(12s^2 - 1)H + C\right)$$

hat und die oben erwähnten Formeln, welche sich hieraus ableiten lassen.

Aufserdem hat man auch:

$$V = \frac{h}{12}(12u + 6v + 4w + 3e).$$

Es sind also mehrere Reihen, welche in der Mechanik gebraucht werden, auf geometrische Weise summiert worden, was an Handwerkerschulen oftmals recht erwünscht ist.

Will man nun ferner durch Bestimmung der Koeffizienten x, y, z Vereinfachungen herbeiführen, so kann man $x = y = z = \frac{1}{3}$ setzen und hat die beiden Gleichungen $a + b + c = \frac{3}{2}$ und $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, so dafs also noch ein Schnitt beliebig zu wählen ist. Es wird $V = \frac{h}{3}(A + B + C)$. Erfolgreicher ist aber die Bestimmung, dafs einer dieser Koeffizienten verschwindet, so dafs zur Kubatur des Körpers nur zwei Schnitte erforderlich sind. Setzt man z. B. $y = 0$, so hat man die drei Gleichungen:

$$x + z = 1$$
$$ax + cz = \frac{1}{2}$$
$$a^2x + c^2z = \frac{1}{3},$$

kann also noch eine Bedingung hinzufügen, z. B. $x = z = \frac{1}{2}$. Man findet dann aus $a + c = 1$ und $a^2 + c^2 = \frac{2}{3}$ die schon aufgeführten Werte $a = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{\frac{1}{3}}\right)$, $c = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{1}{3}}\right)$ und $V = \frac{h}{2}(A + C)$. Stellt man aber die Bedingung, dafs a und c rational sein soll und setzt hierzu $x = \frac{1}{1 + 3p^2}$, $z = \frac{3p^2}{1 + 3p^2}$, d. i. $V = \frac{h}{1 + 3p^2}(A + 3p^2C)$, so hat man $a = \frac{1}{2}(1 \pm p)$, $c = \frac{1}{2}\left(1 \mp \frac{1}{3p}\right)$, woraus erhellt, dafs $p < 1$, wenn a ein echter Bruch sein soll, und $p > \frac{1}{3}$ gewählt werden mufs, wenn c ein echter Bruch sein soll, während die

doppelten Vorzeichen in a und c keine verschiedenen Ausdrücke für den Inhalt ergeben, da die beiden Werte von a, und ebenso die von c, sich zur Eins ergänzen, also zeigen, dafs man das Prismatoid nur der Lage nach umkehrt, wenn man von den oberen zu den unteren Vorzeichen übergeht. Wählt man also für p Werte, welche zwischen 1 und $\frac{1}{3}$ liegen, so erhält man eine Reihe von Inhaltsformeln für die Körper zweiten Grades, welche stets nur zwei Schnitte erfordern, deren Höhenlage durch rationale Bruchteile der Körperhöhe bestimmt und deren Koeffizienten ebenfalls rational sind. Doch erhält man hierbei noch vielfach dieselben Resultate. Wird nämlich p durch $\frac{1}{3p}$ ersetzt, so wird a mit c, A mit C, und x mit z vertauscht, so dafs man für $p^2 = \frac{m}{n}$: $V = \frac{h}{n+3m}(nA + 3mC)$ und für $p^2 = \frac{n}{9m}$: $V = \frac{h}{3m+n}(3mA + nC)$, d. h. zwei identische Ausdrücke erhält.

Es wird genügen, wenn ich einzelne Beispiele anführe, nämlich:

$$p^2 = \frac{4}{4} \text{ und } \frac{1}{4} \text{ oder } \frac{1}{9} \text{ und } \frac{4}{9},$$

$$p^2 = \frac{4}{25}, \frac{9}{25}, \frac{16}{25} \text{ oder } \frac{25}{36}, \frac{25}{81}, \frac{25}{144} \text{ u. s. w.}$$

Man hat, für $p^2 = \frac{4}{4}$, $a = 1$ oder 0, $c = \frac{1}{3}$ oder $\frac{2}{3}$ und die bekannten Ausdrücke $V = \frac{h}{4}(D + 3C)$ oder $V = \frac{h}{4}(G + 3C)$;

$$\text{für } p^2 = \frac{1}{4},\ a = \frac{3}{4},\ c = \frac{1}{6} \text{ und } V = \frac{h}{7}(4A + 3C);$$

$$\text{für } p^2 = \frac{4}{25},\ a = \frac{7}{10},\ c = \frac{1}{12} \text{ und } V = \frac{h}{37}(25A + 12C);$$

$$\text{für } p^2 = \frac{16}{25},\ a = \frac{9}{10},\ c = \frac{7}{24} \text{ und } V = \frac{h}{73}(25A + 48C),$$

wobei die Umkehrungsformeln weggelassen sind, u. a. m.

Von Interesse ist die Thatsache, dafs es eine unbegrenzte Anzahl derartiger Formeln giebt, während bisher nur eine bekannt war.

Es lassen sich nun noch folgende eigenartige Aufgaben für Körper zweiten Grades, deren Höhe gegeben ist, lösen:

1. Es ist ein Schnitt A mit seiner Schnitthöhe ah gegeben. Welcher Schnitt mufs gemessen werden, um den Körper zu kubieren?

2. Es sind zwei Schnitte A, C und ihr Abstand $(a - c)h = kh$ gegeben. Welches ist der Rauminhalt?

In den Gleichungen:

$$x + z = 1$$

$$ax + cz = \frac{1}{2}$$

$$a^2x + c^2z = \frac{1}{3}$$

ist ad 1 gegeben a, und c, x, z zu berechnen. Man findet: $c=\frac{3a-2}{3(2a-1)}$, was stets ein echter Bruch ist, wenn a ein solcher ist, und:

$$V=\frac{h}{4(3a^2-3a+1)}\{A+3[2a-1]^2C\}.$$

Ad 2 ist A, C und $a-c=k$ gegeben, so dafs man mit $c=\frac{3a-2}{3(2a-1)}$:

$$a=\frac{1}{2}\left(1+k\pm\sqrt{k^2-\frac{1}{3}}\right)$$

$$c=\frac{1}{2}\left(1-k\pm\sqrt{k^2-\frac{1}{3}}\right)$$

findet. Wenn a und c reell sein sollen, mufs $k>\sqrt{\frac{1}{3}}$ und, wenn sie echte Brüche sein sollen, mufs $k<\frac{2}{3}$ sein, die Aufgabe ist also nur unter ziemlich engen Beschränkungen lösbar. Es wird:

$$V=\frac{h}{2}\left\{\left[1\mp\sqrt{1-\frac{1}{3k^2}}\right]A+\left[1\pm\sqrt{1-\frac{1}{3k^2}}\right]C\right\}.$$

Die verschiedenen Vorzeichen hierin und in a und c gelten, je nachdem man die Höhenlage der Schnitte auf die Grundfläche oder auf die Deckfläche bezieht.

Nach dieser Abschweifung kehre ich zu dem eigentlichen Unterrichtsstoff zurück, zur Behandlung der krummflächig begrenzten Körper. Fafst man diese als eine Summe prismatischer oder prismatoidischer Schichten auf, so kann man auch für diese als Grundlage die Inhaltsformeln der drei Körper, des dreiseitigen Prismas und der beiden, mittels einer Ebene durch eine Deckkante und eine Grundecke entstandenen, Abschnitte desselben: Pyramide und Keil, nehmen.

Das Gesetz der Querschnitte dieser drei Körper ist folgendes. Für das Prisma $Z=G$, für die Pyramide $Z=Gz^2$, und, als Differenz beider, für den Keil $Z=G(1-z^2)$. Dieselben Ausdrücke hat man aber auch für Cylinder, Kegel und Halbkugel. Für den Kegel: $G=r^2\pi$, $Z=y^2\pi$, also $\frac{Z}{G}=\frac{y^2}{r^2}=\frac{h_1^2}{h^2}=z^2$. Für die Halbkugel $G=r^2\pi$, $Z=y^2\pi$, also $\frac{Z}{G}=\frac{y^2}{r^2}=\frac{r^2-h_1^2}{r^2}=1-\frac{h_1^2}{r^2}=1-z^2$. Haben also Prisma und Cylinder, Pyramide und Kegel, Keil und Halbkugel gleiche Grundfläche und Höhe, werden die betreffenden Paare in derselben Schnitthöhe $h_1=zh$ geschnitten, so müssen die Flächen der Schnittfiguren nach demselben Gesetz berechnet werden, also stets dieselben Werte haben. Man erhält also für den Cylinder Gh, für den Kegel $\frac{1}{3}Gh$ und für die Halbkugel $\frac{2}{3}Gh$; der Schüler braucht also nicht neue Formeln zu lernen, sondern bedarf nur der Übung, die gelernten jedem speziellen Falle anzupassen.

Zu diesen Körpern empfiehlt es sich noch die rechtwinklige Durchdringung zweier geraden Kreiscylinder zu nehmen, einen Körper, welcher dadurch Interesse hat, dafs zur



Berechnung seiner Oberfläche und seines Rauminhaltes die Zahl π nicht erforderlich ist, während er doch nur von Cylinderflächen begrenzt ist. Seine durch einen Äquatorialschnitt entstandene Hälfte ist als „Klostergewölbe“ auf einem Quadrat (Seite $2r$) von praktischer Wichtigkeit. Man findet aus Grundrifs und Aufrifs für das Klostergewölbe: $G = 4r^2$, $Z = 4y^2$ und $\frac{Z}{G} = \frac{y^2}{r^2} = \frac{r^2 - h_1^2}{r^2} = 1 - \frac{h_1^2}{r^2} = 1 - z^2$, also dasselbe Gesetz wie für den Keil, folglich für den Rauminhalt ebenfalls: $V = \frac{2}{3} Gh$.

Wird von der Summe der beiden Halbcylinder das Klostergewölbe abgezogen, so hat man für das „Kreuzgewölbe“: $V = 2r^3\pi - \frac{8}{3}r^3 = \frac{2}{3}r^3(3\pi - 4)$, mithin für die Halbkugel, das Klostergewölbe und das Kreuzgewölbe dieselbe Inhaltsformel: $V = \frac{2}{3}ar^3$, wenn der Reihe nach π, 4, $3\pi - 4$ für a gesetzt wird.

Für eine Gewölbeschicht mit dem Radius r im Lichten und der Dicke d ergiebt dies: $V = \frac{2}{3}a([r+d]^3 - r^3)$ oder $V = 2a\,rd(r+d)$, wenn d^3 vernachlässigt werden kann. Hierbei ist für das Kreuzgewölbe zu bemerken, dafs die vier halbkreisförmigen „Schildbögen“ auf den Grundkanten auch mit der Dicke d in Rechnung gestellt sind, also je nach den Bedingungen der Aufgabe abgezogen werden müssen.

Nimmt man nun an, dafs d so gering ist, dafs auch d^2 vernachlässigt werden kann, so hat man $V = 2ar^2d$. Je geringer aber d angenommen wird, desto eher kann man für den Rauminhalt derselben Gewölbeschicht Fd setzen, wenn F die Oberfläche bezeichnet. Man hat dann $Fd = 2ar^2d$ oder $F = 2ar^2$, d. h.:

Die Oberfläche der Halbkugel ist $2r^2\pi = 2G$,

die des Klostergewölbes $8r^2 = 2G$;

für das Kreuzgewölbe hat man zwar $2(3\pi - 4)r^2$, doch müssen für dieses die erwähnten Schildbögen in Abrechnung gebracht werden, da F nur die krummen Teile der Oberfläche bezeichnen soll, so dafs man für das Kreuzgewölbe richtiger

$$F = 2(3\pi - 4)r^2 - 2r^2\pi = 4r^2(\pi - 2) = (\pi - 2)G$$

setzt.

Stellt man nun die Halbkugel und das Klostergewölbe mit jenem Keile zusammen, so ist ersichtlich, dafs eine Zone dieser Körper mit der betreffenden Keilzone gleicher Höhenlage inhaltsgleich sein mufs, da sie Schnitt für Schnitt übereinstimmen. Die Keilzone ist aber ein Prismatoid, also kann man auf diese Zonen bez. Kappen ebenfalls die Formeln des Prismatoids anwenden.

Druck von W. Pormetter in Berlin.




Math 8138.91
Stereometrische untersuchungen.
Cabot Science 003370401
3 2044 091 926 808